Lycée Laymoune
2ème Année comptabilité

Devoir surveillé n° 2 Semestre 2

[2021-2022]

7 **EX.1** une urne contient 9 boules : 3 Rouge ; 4 Vertes et 2 Blanches.
on tire successivement et sans remise deux boules ;

0,5 1°) Mq le nombre de possiblités est : 72.

2°) Soit A et B deux événement : A: " tirer la 1ère de couleur blanche"
et B : " tirer deux boules de même couleurs "

1 2°-a) Mq : $p(A) = \frac{2}{9}$

1,5 2°-b) Calculer $p(B)$ et en déduire que : $p(\overline{B}) = \frac{13}{18}$. ($\overline{B}$ est l'événement contraire)

1 3°) Sachant que la 1ère boule est blanche ; quelle est la probabilité pour que les deux boules soient de couleurs différentes ?

3 4°) Soit X la v.a égal au nombre de boules blanches tirées.
Copier et compléter le tableau ci-contre :
(justifier les calculs)

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	.....	......	......

13 **EX.2** **I** $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = e^x - x$

1 1°) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

1 2°-a) Calculer $g(0)$ et dresser le tableau de variation de g (sans calcul de limites)

0,5 2°-b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$

II $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 2e^x - x^2$
(C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1,5 1°) Calculer : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique.

0,5 2°-a) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f(x) = 2x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}\right)$

1,5 2°-b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation.

0,5 3°-a) Mq : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 2g(x)$

1 3°-b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f.

0,5 4°-a) Vérifier que : $f''(x) = 2(e^x - 1)$; $x \in \mathbb{R}$

1 4°-b) En déduire que $I(0;2)$ est le point d'inflexion de (C).

2 5°) Calculer l'aire de la partie hachurée. (voir figure ci-contre)

III $I = \int_0^1 (x-3)e^x \, dx$

En utilisant une intégration par partie,

2 montrer que : $I = 4 - 3e$

*** fin ***

2ème Bac Comptabilité - Semestre 2.

2021 - 2022

Correction du DS n°2

Exercice 1

3	4	2
R	V	B

$p = 2$
$n = 9$

1°) tirage successive sans remise de $p = 2$ parmi $n = 9$ donc :

$$\text{Card}\,\Omega = A_9^2 = 9 \times 8 = 72$$

2°-a) A : [B|B] ou [B|$\overline{B}$]

$$\text{Card}\,A = A_2^2 + A_2^1 A_7^1 = 2 + 2\times 7 = 16$$

$$p(A) = \frac{16}{72} = \frac{2\times 8}{9\times 8} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

2°-b) B : [R|R] ou [V|V] ou [B|B]

$$\text{Card}\,B = A_3^2 + A_4^2 + A_2^2 = 3\times 2 + 4\times 3 + 2\times 1 = 6 + 12 + 2 = 20$$

$$p(B) = \frac{20}{72} = \frac{5\times 4}{9\times 2\times 4} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

Déduction : on sait que :

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B)$$

donc : $p(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{18-5}{18} = \boxed{\frac{13}{18}}$

3°) on a : B : deux boules de même couleurs

donc : $\overline{B}$: deux boules de couleurs différentes.

on va calculer la probabilité de $\overline{B}$ sachant que A est réalisé

c-à-d : $p_A(\overline{B})$

on sait que :

$$p_A(\overline{B}) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(A)}$$

avec : $p(A) = \frac{2}{9}$

et $A\cap\overline{B}$: [B|R] ou [B|V]

donc : $p(A\cap\overline{B}) = \frac{A_2^1 A_3^1 + A_2^1 A_4^1}{A_9^2}$

$$= \frac{2\times 3 + 2\times 4}{72} = \frac{6+8}{72} = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$$

donc : $p_A(\overline{B}) = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{36}\times\frac{9}{2} = \boxed{\frac{7}{8}}$

4°) on a : X = nombre de boules blanches tirées.

$(X=0)$: [$\overline{B}$|$\overline{B}$] avec : $\overline{B}$ = V ou R

donc : $p(X=0) = \frac{A_7^2}{72} = \frac{42}{72} = \boxed{\frac{21}{36}}$

2ème méthode :

$(X=0)$: [R|V] ou [V|R] ou [V|V] ou [R|R]

$$\text{Card}(X=0) = A_3^1 A_4^1 + A_4^1 A_3^1 + A_4^2 + A_3^1$$

$$= 2\times A_3^1 A_4^1 + A_4^2 + A_3^1 = 42$$

donc : $p(X=0) = \frac{42}{72}$

$(X=1)$: [B|V] ou [V|B] ou [B|R] ou [R|B]

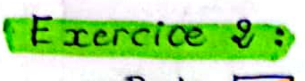
$$2\times A_2^1 A_4^1 + 2\times A_2^1 A_3^1$$

$$p(X=1) = \frac{2\times 2\times 4 + 2\times 2\times 3}{72} = \frac{28}{72} = \boxed{\frac{14}{36}}$$

$(X=2)$: [B|B] $\longrightarrow A_2^2 = 2$

$$p(X=2) = \frac{2}{72} = \boxed{\frac{1}{36}}$$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$



Exercice 2 :

Partie I : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = e^x - x$

1°) $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g'(x) = (e^x)' - x' = e^x - 1$

signe de $g'(x)$:

$g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0$
$\iff e^x = 1$
$\iff x = \ln(1) = 0$

et on a : $e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x) = e^x - 1$	$-$	0	$+$

2°-a) $g(0) = e^0 - 0 = \boxed{1}$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	↘	$g(0) = 1$	↗

2°-b) d'après 2°-a) : $g(0)$ valeur minimal de g : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g(x) \geq g(0)$

avec : $g(0) = 1 > 0$

donc : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0}$

Partie II $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = 2e^x - x^2$

1°) on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \text{"}2 \times 0 - (+\infty)\text{"} = \boxed{-\infty}$

on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2e^x}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{2e^x}{x} - x$$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \text{"}\frac{0}{-\infty}\text{"} = 0$

donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \text{"}0 - (-\infty)\text{"}$

$= \boxed{+\infty}$

interprétation : (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(-\infty)$.

2°-a) on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$2x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = 2x^2 \times \frac{e^x}{x^2} - 2x^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2e^x - x^2 = f(x).$$

donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $\boxed{f(x) = 2x^2\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{2}\right)}$

2°-b) on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2e^x - x^2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \text{"}+\infty \times (+\infty)\text{"} = \boxed{+\infty}$$

car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{+\infty}$$

interprétation : (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $(+\infty)$.

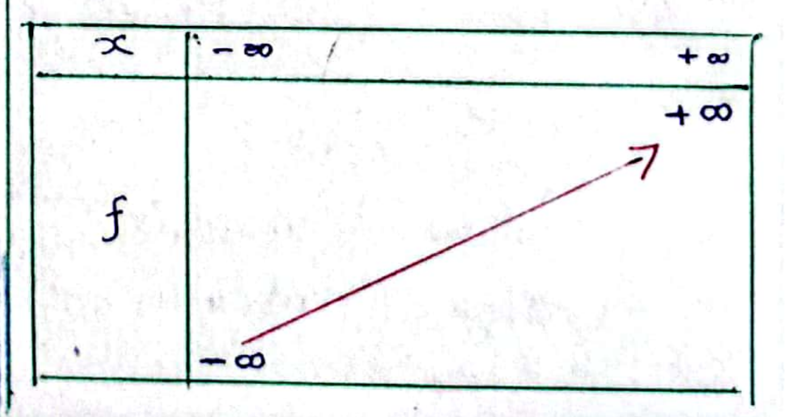
3°-a) $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = (2e^x - x^2)'$

$$= 2e^x - 2x = 2(e^x - x) = 2g(x).$$

3°-b) on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$

donc : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) > 0}$

tableau de variation de f :



4°-a) $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = 2g(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $f''(x) = 2g'(x)$

$$f''(x) = 2(e^x - 1)$$

4°-b) Signe de $f''(x)$: d'après I-1°)

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

f'' s'annule et change de signe en 0 donc :

$I(0; f(0))$ est un point d'inflexion de (C).

càd : $I(0; 2)$

car : $f(0) = 2 \times e^0 - 0 = 2 \times 1 = 2$

(I est le seul point d'inflexion)

5°) soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée.

on sait que :

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^1 |f(x)|\, dx\right) u.A$$

d'après le dessin on a :

$\forall x \in [0; 1]$ $\quad f(x) \geq 0$

donc : $\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$

$= \int_0^1 2e^x - x^2\, dx$

$= 2\int_0^1 e^x\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$

$= 2\left[e^x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= 2(e^1 - e^0) - \left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right)$

$= 2(e - 1) - \frac{1}{3}$

$= 2e - 2 - \frac{1}{3}$

$= 2e - \frac{6}{3} - \frac{1}{3}$

$= 2e - \frac{7}{3}$

$$\mathcal{A} = \left(2e - \frac{7}{3}\right) u.A$$

Partie III

$$J = \int_0^1 (x-3)e^x\, dx$$

$\begin{cases} u(x) = x - 3 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$J = \left[(x-3)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x\, dx$

$= (1-3)e^1 - (0-3)e^0 - \left[e^x\right]_0^1$

$= -2e + 3 \times 1 - (e - 1)$

$= -2e + 3 - e + 1$

$= 4 - 3e$

donc : $J = 4 - 3e$

★ fin ★